TRAPEZOIDAL RULE DENGAN MENGGUNAKAN EXCEL

Krisnawati

Abstract.

Trapezoidal is one of methods that used to approximate numerical integration. Although we can implemented based to mathematical subroutine in this algorithm, we can also use Excel worksheet. It's very simple, because we can generate formula with ordinary mathematic function.

Keywords: Trapezoidal Rule, Excel.

Pendahuluan.

Ada banyak cara yang digunakan untuk melakukan aproksimasi pada saat kita akan menghitung suatu integral dengan batas. Salah satunya adalah Trapezoidal Rule. Trapezoidal Rule merupakan metode yang dikembangkan berdasarkan Mid point Rule. Sebenarnya dua metode tersebut merupakan metode yang sangat sederhana yang nantinya menjadi dasar dalam metode-metode lain misalnya Rieman Rule dan Simson Rule. Aproksimasi ini dianggap perlu jika kita menemui suatu fungsi yang tidak sederhana, dalam arti tidak dapat kita selesaikan secara langsung.

Teorema (Trapezoidal Rule)

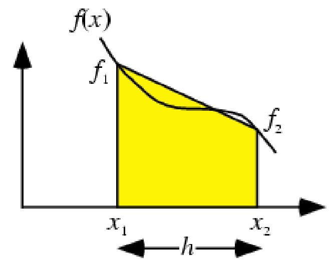
Ambil f(x) pada interval [x0,x1], dimana x1 = x0+h. Trapezoidal Rule didefinisikan sebagai :

$$TR(f, h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

yang didapat dari aproksimasi terhadap integral f(x) pada [x0,x1], sehingga dapat kita tulis :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx TR(f, h)$$

Pada dasarnya integral dengan batas dapat dicari dengan mencari luas daerah yang dibatasi oleh y=f,(x), y=x1 dan y=x2. Gambar 1. berikut ini diberikan ilustrasi untuk penyelesaian $\int_{x1}^{x2} f(x)dx$. Misalnya kita ingin menggunakan 1 interval, maka harus ada dua titik yang diketahui dan ini merupakan syarat minimal dalam Trapezoidal Rule. Sehingga jika diinginkan dalam n interval maka diperlukan (n+1) titik. Berikutnya kita harus mencari nilai $f_1=f(x_1)$ dan $f_2= f(x_2)$. f_1 dan f_2 dihubungkan hingga membentuk trapezium (warna kuning) dan selanjutnya luasan tersebut dicari nilainya.



Gambar 1. Trapezoidal Rule dengan dua titik.

Luasan sisa dari Trapezoidal Rule diberikan oleh rumusan :

$$R_{TR}(f, h) = -\frac{1}{12} f''(c)\,h^3$$

dengan c ada pada [x0,x1] dan mempunyai kesamaan dengan bentuk :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) - \frac{1}{12} f''(c)\,h^3$$

Untuk mengimplementasikan metode tersebut bisa kita lakukan berdasarkan pseudocode sebagai berikut:

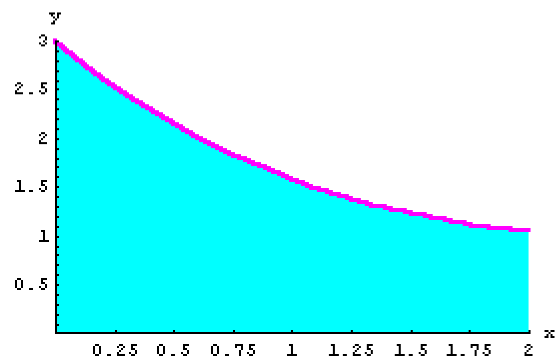
TrapRule (a0,b0,m0)

1. a=N[a0], b=N[b0], m=m0
2. $h = \frac{b-a}{m}$
3. jml=0
4. for(k=1, k≤ m-1, k++)
   jml=jml+f(a+hk)
5. $hsl = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + hjml$

Contoh :

$$\int_0^2 \left(2 + \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{x}\right]\right) dx$$

Untuk permasalahan diatas lakukan aproksimasi dengan trapezoidal rule dengan m=16 interval.



Gambar 2.

$$f[x] = 2 + \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{x}\right]$$

Solusi :

b=2, a=0, m=16

Diperlukan (m+1) = 17 titik.

Bagi [0,2] sedemikian hingga ada 17 titik termasuk 0 dan 2 dengan interval yang sama.

Titik tersebut berturut, turut adalah 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 1, 9/8, 10/8, 11/8, 2.

Selanjutnya masing masing titik kita masukkan ke formula yang ada dan hasilnya kita jumlahkan.

$$\mathrm{hsl} = \frac{\frac{2-0}{16}}{2}(f(0) + 2f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{2}{8}) + 2f(\frac{3}{8}) + 2f(\frac{4}{8}) + 2f(\frac{5}{8}) + 2f(\frac{6}{8})$$

$$+ 2f(\frac{7}{8}) + 2f(\frac{8}{8}) + 2f(\frac{9}{8}) + 2f(\frac{10}{8}) + 2f(\frac{11}{8}) + 2f(\frac{12}{8}) + 2f(\frac{13}{8}) + 2f(\frac{14}{8})$$

$$+ 2f(\frac{15}{8}) + 2f(\frac{16}{8})$$

=3.46232

Jika kita perhatikan prinsip dari trapezoidal rule adalah mencari jumlah luasan masing-masing daerah yang terbentuk dari masing-masing interval, terlihat gambaran proses dalam contoh diatas.

Subroutine diatas dapat kita implementasikan dengan mudah menggunakan MatLab.

```
%trapezoidal rule
clc;clear;
syms x;
a=input('Batas bawah a = ');
b=input('Batas atas  b = ');
```

```
y=input('Fungsi y = ');
m=input('Jumlah interval m = ');
h=(b-a)/m;
h1=h/2;
j1=subs(y,x,a);
j2=subs(y,x,b);
jml=j1+j2;
t=h;
for i=1:(m-1),
   j3=(b-a)*subs(y,x,t);
   jml=jml+j3;
   t=t+h;
end;
hsl=jml*h1;
disp('Hasil =');
disp(hsl);
```

Output untuk listing diatas :

```
Batas bawah a = 0
Batas atas  b = 2
Fungsi y = 2+cos(2*x^0.5)
Jumlah interval m = 16
Hasil =
   3.4623
```

Selain dengan menggunakan subroutine diatas, kita bisa membuat satu worksheet di Excel untuk menyelesaikan kasus diatas.

Contoh untuk kasus diatas :

$$\int_0^2 \left(2 + \mathrm{Cos}\left[2\sqrt{x}\right]\right) dx$$

b=2, a=0, m=16

b	2
m	16
h	0.125

h/2	0.0625		
0	0	3	3
1	0.125	2.760245	5.520489
2	0.25	2.540302	5.080605
3	0.375	2.339186	4.678372
4	0.5	2.155944	4.311887
5	0.625	1.989658	3.979315
6	0.75	1.839443	3.678887
7	0.875	1.704449	3.408898
8	1	1.583853	3.167706
9	1.125	1.476866	2.953732
10	1.25	1.382727	2.765454
11	1.375	1.300704	2.601409
12	1.5	1.230094	2.460189
13	1.625	1.17022	2.34044
14	1.75	1.120431	2.240863
15	1.875	1.080104	2.160207
16	2	1.048637	1.048637
			55.39709
			3.462318

Tabel 1: Penyelesaian dengan menggunakan Excel

Hasil diatas digenerate dengan menggunakan formula di bawah ini :

	A	B	C	D
1	a	0	diketahui	
2	b	2	diketahui	
3	m	16	diketahui	
4	h	=(B2-B1)/B3		
5	h/2	=B4/2		
6	0	0	=2+COS(2*SQRT(B6))	=C6
7	1	=B6+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B7))	=($B$2-$B$1)*C7
8	2	=B7+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B8))	=($B$2-$B$1)*C8
9	3	=B8+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B9))	=($B$2-$B$1)*C9

10	4	=B9+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B10))	=($B$2-$B$1)*C10
11	5	=B10+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B11))	=($B$2-$B$1)*C11
12	6	=B11+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B12))	=($B$2-$B$1)*C12
13	7	=B12+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B13))	=($B$2-$B$1)*C13
14	8	=B13+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B14))	=($B$2-$B$1)*C14
15	9	=B14+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B15))	=($B$2-$B$1)*C15
16	10	=B15+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B16))	=($B$2-$B$1)*C16
17	11	=B16+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B17))	=($B$2-$B$1)*C17
18	12	=B17+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B18))	=($B$2-$B$1)*C18
19	13	=B18+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B19))	=($B$2-$B$1)*C19
20	14	=B19+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B20))	=($B$2-$B$1)*C20
21	15	=B20+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B21))	=($B$2-$B$1)*C21
22	16	=B21+$B$4	=2+COS(2*SQRT(B22))	=C22
23				=SUM(D6:D22)
24				=D23*B5

Tabel 2. Formula untuk mengenerate hasil pada table 1.

Jika kita bandingkan hasil yang didapatkan baik dengan cara manual, implementasi dengan MatLab, maupun dengan Excel memberikan nilai yang sama.

Daftar Pustaka

Gary J. Lastman & Naresh K. Sinha, 2000, Microcomputer-Based Numerical Methods for Science and Enginering.

http://www.mccd.edu/faculty/powerd/M4a_Midpoint.htm

http://mathews.ecs.fullerton.edu/n2003/TrapezoidalRuleMod.html