STUDI KASUS TERHADAP PENYELESAIAN SISTEM PERSAMANAAN LINEAR DENGAN ELIMINASI GAUSS

Krisnawati
STMIK AMIKOM Yogyakarta

Abstraksi

Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear adalah metode eliminasi gauss. Metode ini bekerja dengan melakukan operasi baris elementer terhadap matrik yang diperoleh dari system persamaan linear yang diketahui. Pada saat implementasi dalam program ada kasus khusus yang arus ditangani, yaitu pada saat baris yang dijadikan acuan operasi baris elementer ternyata bernilai 0. Penanganannya sederhana, proses membuat 0 digantikan dengan proses penukaran baris yang ternyata 0 tersebut.

Keyword : *system persamaan linear, eliminasi gauss*

Pendahuluan

Persamaan linear adalah suatu persamaan yang pada saat digambar kurvanya berupa garis lurus. Sedangkan system persamaan linear adalah suatu sistem yang didalamnya terdiri dari minimal 2 persamaan linear. Menyelesaikan persamaan linear sama artinya dengan mencari titik potong antara persamaan-persamaan yang diketahui.

Eliminasi Gauss merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan system persamaan linear. Diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+.....+a_{1n}x_n=a_{1n+1}$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+.....+a_{2n}x_n=a_{2n+1}$
....
$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+.....+a_{nn}x_n=a_{nn+1}$

Sistem persamaan linear tersebut dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Matrik dibawa kebentuk matrik satuan sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Proses untuk membawa matrik asal ke matrik satuan menggunakan operasi baris elementer. Operasi baris elementer adalah:

1. Menjumlah/mengurangi suatu baris dengan k kali baris yang lain. k adalah konstanta real.
2. Mengalikan/membagi suatu baris dengan k. k adalah konstanta real.

   Cara ini banyak dipakai jika sistem persamaan linear diselesaikan secara manual. Tujuannya adalah untuk mempersingkat bentuk persamaan.

Untuk mempermudah proses, matrik terlebih dahulu dibawa ke bentuk matrik segitiga atas/bawah, kemudian ke bentuk matrik diagonal, dan akhirnya ke matrik satuan.

Pembahasan

1. Ilustrasi Proses Pada Metode Eliminasi Gauss

Contoh:

Diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut:

$3x + 2y + z = 0$
$2x + y + 3z = 2$
$x + 3y + 2z = 4$

Sistem persamaan linear diatas memberikan matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrik diatas diubah menjadi matrik segitiga atas dengan proses sebagai berikut:
Baris ketiga dikurangi dengan ½ kali baris ke dua sehingga matrik menjadi :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Baris kedua dikurangi dengan2/3 baris pertama sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Baris ketiga ditambah dengan 15/2 kali baris kedua sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrik diatas sudah dalam bentuk matrik segitiga. Selanjutnya akan dibawa ke bentuk matrik diagonal dengan proses sebagai berikut:
Baris pertama dikurangi dengan 3/7 baris kedua, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{15}{7} & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Baris kedua dikurangi dengan 7/54 kali baris ketiga, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{15}{7} & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Baris pertama ditambah dengan 45/7 kali baris kedua, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrik sudah dalam bentuk matrik diagonal, akhirnya dibawa ke bentuk matrik satuan, dengan proses sebagai berikut:
Baris pertama dibagi dengan 3, baris kedua dibagi dengan -1/3 dan baris ketiga dibagi dengan 18 sehingga matrik menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Implementasi Metode Eliminasi Gauss dengan Matlab

Sesuai dengan ilustrasi proses diatas, maka untuk membuat matrik menjadi matrik segitiga atas didapatkan skrip sebagai berikut, dengan asusmsi telah dilakukan pengecekan apakah matrik singular atau tidak.

```
for k=1:ba-1
  for i=ba:-1:k+1
      p=eg(i,k)/eg(i-1,k);
      for j=1:kolom
         eg(i,j)=eg(i,j)-p*eg(i-1,j);
      end
  end
end
```

Untuk membuat matrik segitiga atas menjadi matrik diagonal, tinggal melakukan modifikasi terhadap skrip diatas, sehingga didapat:

```
for k=ba:-1:2
  for i=1:k-1
      p=eg(i,k)/eg(i+1,k);
      for j=1:kolom
         eg(i,j)=eg(i,j)-p*eg(i+1,j);
      end
  end
end
```

Akhirnya skrip untuk mengubah matrik menjadi matrik diagonal adalah sebagai berikut:

```
for i=1:ba
    if eg(i,i)~=1
       eg(i,kolom)=eg(i,kolom)/eg(i,i);
       eg(i,i)=1;
    end
end
```

3. Studi Kasus

Skrip diatas akan diuji cobakan terhadap dua kasus, dan akan dilakukan analisis terhadap output kedua kasus tersebut.

Kasus 1:

$$3x + 2y + z = 0$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + 3y + 2z = 4$$

Memberikan output sebagai berikut:

```
e =

    3.0000    2.0000    1.0000         0
    2.0000    1.0000    3.0000    2.0000
         0    2.5000    0.5000    3.0000


e =

    3.0000    2.0000    1.0000         0
         0   -0.3333    2.3333    2.0000
         0    2.5000    0.5000    3.0000

e =

    3.0000    2.0000    1.0000         0
         0   -0.3333    2.3333    2.0000
         0         0   18.0000   18.0000

e =

    3.0000    2.1429         0   -0.8571
         0   -0.3333    2.3333    2.0000
         0         0   18.0000   18.0000

e =

    3.0000    2.1429         0   -0.8571
```

```
         0   -0.3333         0   -0.3333
         0         0   18.0000   18.0000

e =

    3.0000         0         0   -3.0000
         0   -0.3333         0   -0.3333
         0         0   18.0000   18.0000

e =

    1.0000         0         0   -1.0000
         0    1.0000         0    1.0000
         0         0    1.0000    1.0000
```

Kasus 2:

3x + 9y + 6z = 12
4x +12 y + 12z = 12
1x +-1y + 1z = 1

Memberikan output sebagai berikut:

```
Warning: Divide by zero.
> In F:\KRISNA\eliminasitdkok.m at line 22



e =

     3     9     6    12
     0     0     4    -4
   NaN   NaN   Inf  -Inf

e =
```

```
    3     9     0    18
    0     0     4    -4
  NaN   NaN   Inf  -Inf

e =

    3     9     0    18
  NaN   NaN   NaN   NaN
  NaN   NaN   Inf  -Inf

e =

  NaN   NaN   NaN   NaN
  NaN   NaN   NaN   NaN
  NaN   NaN   Inf  -Inf

e =

    1   NaN   NaN   NaN
  NaN     1   NaN   NaN
  NaN   NaN     1   NaN
```

Skrip tidak menemui masalah pada saat diimplementasikan terhadap kasus 1, tetapi pada kasus 2 ternyata output tidak dapat dihasilkan. Pada saat nilai e_{32} akan dibuat menjadi 0, ternyata nilai acuan yakni e_{22} ternyata juga 0. Padahal nilai ini yang nanti akan menentukan konstanta k.

```
e =

    3     9     6    12
    0     0     4    -4
  NaN   NaN   Inf  -Inf
```

```
for k=1:ba-1
  for i=ba:-1:k+1
        p=eg(i,k)/eg(i-1,k);
        for j=1:kolom
            eg(i,j)=eg(i,j)-p*eg(i-1,j);
        end
  end
end
```

Konstanta k yang pada skrip disebut dengan p diperoleh dari e_{32} dibagi dengan e_{22}. Padahal nilai e_{22} adalah nol. Oleh karena itu jika nilai acuan untuk menentukan k adalah nol, maka dilakukan penukaran baris, sehingga tidak perlu membuat nilai asal menjadi 0. Dengan penambahan pengecekan untuk penukaran baris, maka skrip untuk menentukan matrik segitiga menjadi sebagai berikut:

```
 for k=1:b1-1
for i=b1:-1:k+1
    if (e(i-1,k)==0)
        for x=1:b1+1
            temp=e(i-1,x);
            e(i-1,x)=e(i,x);
            e(i,x)=temp;
        end
    else
        p=e(i,k)/e(i-1,k);
        for j=1:k1+1
            e(i,j)=e(i,j)-(p*e(i-1,j));
        end
    end
    e
end
end
```

Penutup

Proses manual yang biasa digunakan untuk menyelesaikan system persamaan linear, tidak bisa begitu saja diterapkan dalam pemrograman. Diperlukan beberapa perlakuan yang berbeda, yang pada prinsipnya bertujuan untuk memperoleh bentuk matrik yang paling optimal. Kasus nilai acuan 0, dapat ditangani dengan melakukan penukaran baris terhadap baris yang akan dinolkan dengan baris dimana posisi nilai acuan 0 tersebut berada.

Daftar Pustaka

Gary J. Lastman, Naresh K. Sinha, 2000, *Microcomputer-Based Numerical Methods for Science and Enginering*. Saunders College Publishing.

Myron B. Allen III & Eli L. Isaacson, 1998. *Numerical Analysis for Applied Science.* John Wiley & Son, Inc New York.

Susila, I Nyoman, 1993. *Dasar-dasar Metode Numerik***.** Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan tinggi.

William J Palm, 2004, *Introduction to MatLab 6 for Engineers*, The McGraw-Hill Companies, Inc.